LUYỆN TẬP SỐ PHỨC

A. Lý thuyết

1. Mỗi số phức có dạng $x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và i là đơn vị ảo $(i^2=-1)$.

2. Số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ có $\overline{z}=x-yi,\ |z|=\sqrt{x^2+y^2}=|\overline{z}|=\sqrt{z.\overline{z}}$, điểm biểu diễn $M(x,y)$.

3. Ta có $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2;\ |z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$ và $\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ với mọi $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

4. Nếu $A(z_1),B(z_2)$ thì $|mz_1+nz_2|=\left|m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\right|$, đặc biệt $AB=|z_1-z_2|$.

B. Phương pháp giải

1. Phương pháp "số thực".
2. Phương pháp "hình học".
3. Phương pháp "số phức".

C. Luyện tập

Bài 1. (Câu 28, trang 83 Đề cương LHP) Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng

A. 8. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Lời giải

Cách 1. Đặt $z_1=x_1+y_1.i,\ z_2=x_2+y_2.i\left(x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}\right)$. Ta có

$$|z_1|=|z_2|=2\Leftrightarrow {x_1}^2+{y_1}^2={x_2}^2+{y_2}^2=4.$$

$$\begin{aligned}|z_1+2z_2|=4&\Leftrightarrow\left(x_1+2x_2\right)^2+\left(y_1+2y_2\right)^2=16\\&\Leftrightarrow {x_1}^2+{y_1}^2+4{x_2}^2+4{y_2}^2+4x_1x_2+4y_1y_2=16\\&\Leftrightarrow 4+4.4+4\left(x_1x_2+y_1y_2\right)=16\\&\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=-1.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\left(|2z_1-z_2|\right)^2&=\left(2x_1-x_2\right)^2+\left(2y_1-y_2\right)^2\\&=4{x_1}^2-4x_1x_2+x_2^2+4{y_1}^2-4y_1y_2+y_2^2\\&=4\left({x_1}^2+{y_1}^2\right)-4\left(x_1x_2+y_1y_2\right)+x_2^2+y_2^2\\&=4.4-4.(-1)+4\\&=24.\end{aligned}$$

Do vậy $|2z_1-z_2|=2\sqrt{6}$. **Chọn B.**

Cách 2.1. Gọi hai điểm A và B lần lượt biểu diễn 2 số phức z_1,z_2.

Ta có $|z_1|=|z_2|=2\Rightarrow OA=OB=2$. Ta lại có

$$\begin{aligned}|z_1+2z_2|=4&\Rightarrow\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|=4\\&\Rightarrow OA^2+4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+4OB^2=16\\&\Rightarrow 4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-4\end{aligned}$$

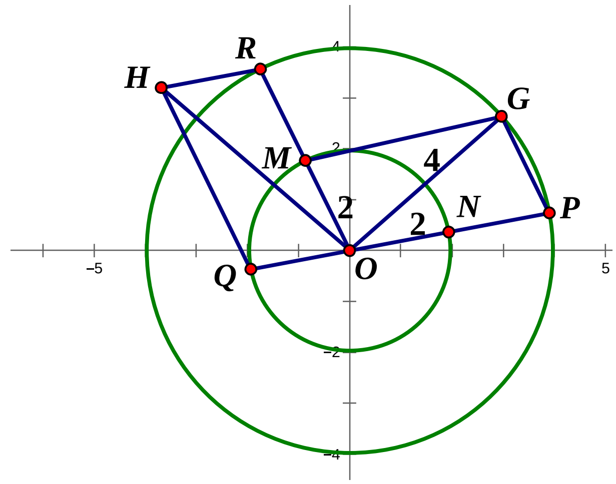
Suy ra

$$|2z_1-z_2|^2=\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|^2=4OA^2-4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+OB^2=24\Rightarrow|2z_1-z_2|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}.$$

Cách 2.2. Gọi M, N là điểm biểu diễn z_1, z_2 trên mặt phẳng phức.

Vì $|z_1| = |z_2| = 2$ nên M, N thuộc đường tròn tâm O có bán kính bằng 2.

Gọi P, Q, R lần lượt biểu diễn các số phức $2z_2, -z_2, 2z_1$.



Dựng hình bình hành $OMGP$ thì $OG = |z_1 + 2z_2| = 4$.

Dựng hình bình hành $OQHR$ thì $OH = |2z_1 - z_2|$.

Ta thấy $\begin{cases} \widehat{ROQ} + \widehat{HRO} = 180^\circ \\ \widehat{ROQ} + \widehat{MOP} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{HRO} = \widehat{MOP}$.

Mà: $\widehat{MOP} + \widehat{OMG} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{HRO} + \widehat{OMG} = 180^\circ$.

Xét tam giác MOG có $OM = 2, OG = 4, MG = OP = 4$.

Do đó $\cos \widehat{OMG} = \dfrac{MG^2 + OM^2 - OG^2}{2.MG.OM} = \dfrac{4^2 + 2^2 - 4^2}{2.4.2} = \dfrac{1}{4}$.

Suy ra $\cos \widehat{HRO} = -\cos \widehat{OMG} = -\dfrac{1}{4}$.

Do vậy $OH^2 = RH^2 + RO^2 - 2.RH.RO.\cos \widehat{HRO} = 2^2 + 4^2 - 2.2.4.\left(\dfrac{-1}{4}\right) = 24$.

Cách 3. Ta có $z_1.\overline{z}_1 = z_2.\overline{z}_2 = 4$ và $16 = (z_1 + 2z_2)(\overline{z}_1 + 2\overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + 4z_2\overline{z}_2 + 2(z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1)$.

Suy ra $z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 = -2$.

Do vậy $|2z_1 - z_2| = \sqrt{(2z_1 - z_2)(2\overline{z}_1 - \overline{z}_2)} = \sqrt{4z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 - 2(z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1)} = \sqrt{24}$.

Chú ý 1. Công thức tính nhanh

Nếu $|z_1| = a, |z_2| = b, |mz_1 + nz_2| = c$ **thì** $|pz_1 + qz_2| = \sqrt{p^2a^2 + q^2b^2 + \dfrac{pq}{mn}(c^2 - m^2a^2 - n^2b^2)}$.

Áp dụng công thức trên với $a = b = 2, c = 4, m = 1, n = 2, p = 2, q = -1$ ta được kết quả $\sqrt{24}$.

Chú ý 2. Chọn $z_1 = 2$. Đặt $z_2 = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ thì $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (1+x)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$.

Chọn $z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{2}i$ ta có $|2z_1 - z_2| = \left|2.2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i\right| = \left|\dfrac{9}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i\right| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Bài luyện tập 1. (Câu VDC Số phức trong ĐMH 2021) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 1$; $|z_2| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|3z_1 + z_2 - 5i|$.

Bài 2. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng 2. Giá trị của $|z|$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{1}{4}$.

Cách 1. Đặt $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$ ta có $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^2+y^2} = 2.$ Suy ra

(cách 1.1) $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2\left(x^2+y^2-x\sqrt{x^2+y^2}\right)} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{4}.$

(cách 1.2)

$4(x^2+y^2)-(4x+1)\sqrt{x^2+y^2}+x = 0 \Leftrightarrow \left(4\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+y^2} = 1.$

Cách 2. Ta có $\frac{1}{|z|-z} + \left(\overline{\frac{1}{|z|-z}}\right) = 4.$ Suy ra $\frac{1}{|z|-z} + \frac{1}{|z|-\frac{|z|^2}{z}} = 4 \Leftrightarrow \frac{|z|-z}{|z|\left(|z|-z\right)} = 4 \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{4}.$

Cách 3. Do tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\frac{1}{z-|z|}$ là đường thẳng $x = -2$ nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z-|z|$ là đường tròn $\left(I; \frac{1}{4}\right)$ với $I\left(\frac{-1}{4}; 0\right)$. Do vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. Vậy $|z| = \frac{1}{4}$.

Chú ý. Chọn $z = x + 0i\ (x \in \mathbb{R})$ ta có $2 = \frac{1}{|x|-x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$. Khi đó $|z| = |x| = \frac{1}{4}$.

Bài luyện tập 2. Có bao nhiêu số nguyên dương m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\left|z + \frac{16}{z}\right| = 8$ và $|z-3| = m$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

D. Bài tập về nhà

(GIẢI CÁC BÀI TẬP SAU TRONG ĐỀ CƯƠNG 12 LHP)

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|z+2i\right|^2+2\left|1-\overline{z}\right|^2+3\left|z-2+i\right|^2=2018$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $\left(\frac{4}{3};\frac{-7}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{-4}{3};\frac{5}{6}\right)$. **C.** $(1;1)$. **D.** $\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{6}\right)$.

Lời giải

Cách 1.

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức z. Khi đó

$$\left|z+2i\right|^2+2\left|1-\overline{z}\right|^2+3\left|z-2+i\right|^2=2018$$

$$\Leftrightarrow \left|x+(y+2)i\right|^2+2\left|(1-x)+yi\right|^2+3\left|(x-2)+(y+1)i\right|^2=2018$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2+2(x-1)^2+2y^2+3(x-2)^2+3(y+1)^2=2018$$

$$\Leftrightarrow 6x^2+6y^2-16x+10y-1997=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}y-\frac{1997}{6}=0.$$

Vậy tâm của đường tròn biểu diễn số phức z là $\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **Chọn D**

Cách 2.

Gọi $A(x;y)$, $B(0;-2);C(1;0);D(2;-1)$ lần lượt biểu diễn số phức $z,-2i,1,\ 2-i$.

Khi đó $\left|z+2i\right|^2+2\left|1-\overline{z}\right|^2+3\left|z-2+i\right|^2=2018 \Leftrightarrow AB^2+2AC^2+3AD^2=2018.$

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{ID}=\vec{0}.$ Suy ra: tọa độ $I\left(\frac{4}{3};\frac{-5}{6}\right)$.

$$AB^2+2AC^2+3AD^2=2018$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+2.\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+3.\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}\right)^2=2018$$

$$\Leftrightarrow 6AI^2+IB^2+2IC^2+3.ID^2+2.\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB}+4.\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC}+6.\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{ID}=2018$$

$$\Leftrightarrow 6AI^2+\frac{113}{36}+2.\frac{29}{36}+3.\frac{17}{36}=2018$$

$$\Leftrightarrow AI=\sqrt{\frac{12071}{36}}.$$

Vập hợp các điểm A thỏa mãn yêu cầu bài toán cách I một đoạn là: $R=\sqrt{\frac{12071}{36}}$

Vậy tâm của đường tròn biểu diễn số phức z là $\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{6}\right)$, $R=\sqrt{\frac{12071}{36}}$.

Cách 3. Ta có

$$\left|z+2i\right|^2+2\left|1-\overline{z}\right|^2+3\left|z-2+i\right|^2=2018$$
$$\Leftrightarrow \left(z+2i\right)\left(\overline{z}-2i\right)+2\left(1-\overline{z}\right)\left(1-z\right)+3\left(z-2+i\right)\left(\overline{z}-2-i\right)=2018$$
$$\Leftrightarrow 6z.\overline{z}+z\left(-2i-2-6-3i\right)+\overline{z}\left(2i-2-6+3i\right)+21=2018$$
$$\Leftrightarrow 36z\overline{z}+6z\left(-8-5i\right)+6\overline{z}\left(-8+5i\right)=11982$$
$$\Leftrightarrow 6z\left(6\overline{z}-8-5i\right)+\left(-8+5i\right)\left(6\overline{z}-8-5i\right)-\left(-8-5i\right)\left(-8+5i\right)=11982$$
$$\Leftrightarrow \left(6z-8+5i\right)\left(6\overline{z}-8-5i\right)=12071$$
$$\Leftrightarrow \left|6z-8+5i\right|^2=12071$$
$$\Leftrightarrow \left|z-\frac{4}{3}+\frac{5}{6}i\right|=\sqrt{\frac{12071}{6}}.$$

Vậy tâm I đại diện cho số phức $\frac{4}{3}-\frac{5}{6}i$, suy ra $I\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{6}\right)$.

Cách trắc nghiệm.

Cho z là số thực.

$$\left|z+2i\right|^2+2\left|1-\overline{z}\right|^2+3\left|z-2+i\right|^2=2018$$
$$\Rightarrow z^2+4+2\left(1-z\right)^2+3\left[\left(z-2\right)^2+1\right]=2018$$
$$\Rightarrow 6z^2-16z-1997=0.$$

Phương trình trên có hai nghiệm z_1, z_2.

Cho z là số thuần ảo. Đặt $z=xi \quad x\in\mathbb{R}$

$$\left|z+2i\right|^2+2\left|1-\overline{z}\right|^2+3\left|z-2+i\right|^2=2018$$
$$\Rightarrow \left(2+x\right)^2+2\left(1^2+x^2\right)+3\left[\left(-2\right)^2+\left(x+1\right)^2\right]=2018$$
$$\Rightarrow 6x^2+10x-1997=0.$$

Chọn một nghiệm x_3 của phương trình trên.

Vậy tâm của đường tròn là tâm ngoại tiếp tam giác ABC với $A\left(x_1,0\right), B\left(x_2,0\right), C\left(0,x_3\right)$. Thay tọa 3 điểm trên vào phương trình $2ax+2by-c=x^2+y^2$, ta được hệ 3 phương trình 3 ẩn, giải ra $\begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=-\frac{5}{6} \\ c=\frac{-1997}{6} \end{cases}$. Vậy tâm $I\left(\frac{4}{3},-\frac{5}{6}\right)$.

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-1\right|=5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w=\left(2+3i\right)\overline{z}+3+4i$ là một đường tròn bán kính R. Tính R.

A. $R=5\sqrt{10}$. **B.** $R=5\sqrt{5}$. **C.** $R=5\sqrt{13}$. **D.** $R=5\sqrt{17}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$ là đường tròn (C) tâm $I(1;0)$ và bán kính $R=5$. Ta có (C) nhận trục hoành là trục đối xứng nên tọa độ điểm biểu diễn $\overline{z}$ cũng nằm trên đường tròn này hay $|\overline{z}-1|=5.$

Ta có $w=(2+3i)\overline{z}+3+4i$

$\Leftrightarrow w=(2+3i)(\overline{z}-1)+(2+3i)+3+4i$

$\Leftrightarrow w-(5+7i)=(2+3i)(\overline{z}-1)$

$\Rightarrow |w-(5+7i)|=|(2+3i)|.|\overline{z}-1|=5\sqrt{13}.$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(5;7)$ bán kính $R=5\sqrt{13}.$

<u>**Cách 2.**</u> Đặt $w=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R}).$

$w=(2+3i)\overline{z}+3+4i \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{w-3-4i}{2+3i}=\dfrac{x+yi-3-4i}{2+3i}=\dfrac{(x+yi-3-4i)(2-3i)}{13}=\dfrac{2x+3y-18}{13}+\left(\dfrac{-3x+2y+1}{13}\right)i.$

$\Rightarrow z=\dfrac{2x+3y-18}{13}+\left(\dfrac{-3x+2y+1}{13}\right)i.$

$$|z-1|=5$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x+3y-18}{13}-1\right)^2+\left(\frac{-3x+2y+1}{13}\right)^2=25$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x+3y-31}{13}\right)^2+\left(\frac{-3x+2y+1}{13}\right)^2=25$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+9y^2+31^2+12xy-124x-186y+9x^2+4y^2+1-12xy-6x+4y=25.13^2$$

$$\Leftrightarrow 13(x^2+y^2)-130x-182y-3263=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-10x-14y-251=0.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(5;7)$ bán kính $R=\sqrt{5^2+7^2+251}=5\sqrt{13}.$

Cách 3.

Ta có: $|z-1|=5\Rightarrow |\overline{z-1}|=5\Rightarrow |\overline{z}-1|=5$.

$w=(2+3i)\overline{z}+3+4i\Rightarrow \overline{z}=\dfrac{w-3-4i}{2+3i}$. Thay vào $|\overline{z}-1|=5$, ta có:

$\left|\dfrac{w-3-4i}{2+3i}-1\right|=5\Rightarrow |w-3-4i-2-3i|=5|2+3i|=5\sqrt{13}\Rightarrow |w-5-7i|=5\sqrt{13}$.

Vậy $R=5\sqrt{13}$.

Cách trắc nghiệm:

Để xây dựng đường tròn ta cần 3 điểm biểu diễn của w, vì z sẽ sinh ra w nên đầu tiên ta sẽ chọn 3 giá trị đại diện của z thỏa $|z-1|=5.$

Chọn $z=6+0i.$ Khi đó: $w=(2+3i).6+3+4i=15+22i.$ có điểm biểu diễn là $A(15;22).$

Chọn $z=1+5i.$ Khi đó: $w=(2+3\text{i}).(1+5\text{i})+3+4\text{i}=-10+17i$ có điểm biểu diễn là $B(-10;17).$

Chọn $z=1-5i.$ Khi đó: $w=(2+3\text{i}).(1-5\text{i})+3+4\text{i}=20-3\text{i}$ có điểm biểu diễn là $C(20;-3).$

Vậy 3 điểm M, N, P thuộc đường tròn biểu diễn tập hợp các số phức w có dạng tổng quát $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$

Để tìm được các số a, b, c thì dùng máy tính CASIO giải hệ phương trình thu được kết quả sau: $a = -10,\ b = -14,\ c = -251.$

Vậy phương trình đường tròn có dạng: $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 251 = 0.$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(5;7)$ bán kính $R = \sqrt{5^2 + 7^2 + 251} = 5\sqrt{13}.$

Câu 33. Cho M là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|2z - i| = |2 + iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

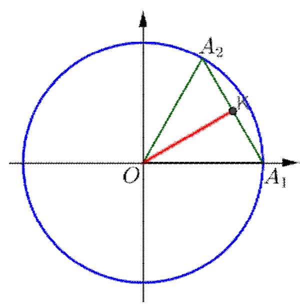
A. $P = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $P = \sqrt{3}.$ **C.** $P = 2.$ **D.** $P = \sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn B

<u>Cách 1.</u> Gọi $z = x + yi\,(x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có : $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y-1)^2} = \sqrt{(2-y)^2 + x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$



Gọi A_1, A_2 là điểm biểu diễn tương ứng của $z_1, z_2 \Rightarrow A_1; A_2$ thuộc đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 1.

Theo giả thiết $|z_1 - z_2| = 1 \Rightarrow A_1A_2 = 1$. Suy ra, ΔOA_1A_2 đều cạnh bằng 1.

Khi đó, $P = |z_1 + z_2| = 2OK = 2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (với K là trung điểm A_1A_2).

<u>Cách 2.</u> Gọi $z = x + yi\,(x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có : $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y-1)^2} = \sqrt{(2-y)^2 + x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$

Từ đó, gọi $z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i\,(x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R})$ thỏa ${x_1}^2 + {y_1}^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2 = 1.$

Có:
$$\begin{aligned} & |z_1 - z_2| = 1 \\ & \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow 1 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 = 1 \\ & \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \end{aligned}$$

$P^2 = (|z_1 + z_2|)^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$

Cách 3. Gọi $z = x + yi\left(x; y \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có : $\left|2z - i\right| = \left|2 + iz\right| \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + \left(2y - 1\right)^2} = \sqrt{\left(2 - y\right)^2 + x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$

Suy ra tập hợp các số phức thỏa mãn là đường tròn tâm $O\left(0;0\right)$, $R = 1 \Rightarrow \left|z_1\right| = \left|z_2\right| = 1.$

$\left(\left|z_1 + z_2\right|\right)^2 + \left(\left|z_1 - z_2\right|\right)^2 = 2{z_1}^2 + 2{z_2}^2 = 4$

$\Leftrightarrow P^2 + 1 = 4$

$\Rightarrow P = \sqrt{3}\left(\left|z_1 + z_2\right| \geq 0\right).$

Cách trắc nghiệm:

Gọi $z = x + yi\left(x; y \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có : $\left|2z - i\right| = \left|2 + iz\right| \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + \left(2y - 1\right)^2} = \sqrt{\left(2 - y\right)^2 + x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1\left(1\right).$

Chọn $z_1 = 1 \Rightarrow \left|1 - z_2\right| = 1.$ Từ đây ta có: $\left|1 - x - yi\right| = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1\left(2\right).$

Vì z_2 thỏa mãn $\left|2z - i\right| = \left|2 + iz\right|$ và $\left|z_1 - z_2\right| = 1$nên từ $\left(1\right)$và $\left(2\right)$ta có được: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra: $z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}.$

Vậy: $P = \left|z_1 + z_2\right| = \left|1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right| = \sqrt{3}.$

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + 1 - i\right| = \left|z - 3i\right|$. Tính môđun nhỏ nhất của $z - i$.

A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải:

Chọn A.

<u>Cách 1.</u> Gọi $z = x + yi \quad \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có $\left|z + 1 - i\right| = \left|z - 3i\right|$

$\Leftrightarrow \left|\left(x+1\right) + \left(y-1\right)i\right| = \left|x + \left(y-3\right)i\right|$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+1\right)^2 + \left(y-1\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y-3\right)^2}$

$\Leftrightarrow 2x + 4y - 7 = 0.$

Gọi điểm M biểu diễn z và điểm $A\left(0;1\right)$ biểu diễn i. Khi đó M nằm trên đường thẳng $d: 2x + 4y - 7 = 0$ và $\left|z - i\right| = MA.$

$\left|z - i\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MA$ ngắn nhất $\Leftrightarrow MA \perp d$.

Vậy: $MA = d\left(A, d\right) = \dfrac{\left|2.0 + 4.1 - 7\right|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}.$

Đẳng thức xảy ra khi M là hình chiếu của Alên đường thẳng d. Khi đó tọa độ của M là: $M\left(\dfrac{3}{10}; \dfrac{8}{5}\right)$.

Cách 2. Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z+1-i| = |z-3i|$

$\Leftrightarrow |(x+1)+(y-1)i| = |x+(y-3)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$

$\Leftrightarrow 2x+4y-7=0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{7-4y}{2}$.

Ta có $z - i = x + y.i - i = x + (y-1).i = \dfrac{7-4y}{2} + (y-1).i$.

Môđun nhỏ nhất của

$|z-i|_{\min} \Leftrightarrow |z-i|^2{}_{\min} = \left(\dfrac{7-4y}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 5y^2 - 16y + 13.25 = f(y)$.

$f'(y) = 10y - 16 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{8}{5}$.

Vậy $min\, f(y) = f\left(\dfrac{8}{5}\right) = 0.45 \Rightarrow |z-i|_{\min} = \sqrt{0.45} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Cách 3. Đặt $t = z - i = a + bi \; (a, b \in \mathbb{R})$

$|z+1-i| = |z-3i|$

$\Leftrightarrow |t+1|^2 = |t-2i|^2$

$\Leftrightarrow (t+1)(\overline{t}+1) = (t-2i)(\overline{t}+2i)$

$\Leftrightarrow |t|^2 + (t+\overline{t}) + 1 = |t|^2 + 2i(t-\overline{t}) + 4$

$\Leftrightarrow 2a + 4b = 3 \le \sqrt{(a^2+b^2)(2^2+4^2)}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 \ge \dfrac{9}{20}$

$\Rightarrow |t| \ge \dfrac{3}{\sqrt{20}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}$. Thay $z = a + (2a+1)i$ vào biểu thức $|z+1-i| = |z-3i|$, ta được $a = \dfrac{3}{10}$. Vậy $z = \dfrac{3}{10} + \dfrac{8}{5}i$.

Cách trắc nghiệm:

Trong các mô-đun của số phức ở đáp án, ta tiến hành sắp xếp các số phức theo thứ tự tăng dần mô-đun: $\dfrac{3\sqrt{5}}{10} < \dfrac{3\sqrt{5}}{5} < \dfrac{7\sqrt{5}}{10} < \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z+1-i| = |z-3i|$

$\Leftrightarrow |(x+1)+(y-1)i| = |x+(y-3)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$

$\Leftrightarrow 2x+4y-7=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7-4y}{2}$.

Xét đáp án A.

$\left|z-\mathrm{i}\right|=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\Leftrightarrow\left|z-\mathrm{i}\right|^2=0.45\Leftrightarrow\left(\dfrac{7-4y}{2}\right)^2+(y-1)^2=0.45\Leftrightarrow 5y^2-16y+12,8=0\Leftrightarrow y=1.6.$

Suy ra, có một số phức $z=\dfrac{3}{10}+\dfrac{8}{5}\mathrm{i}$ thỏa mãn hệ thức.

Chọn A.

Câu 39. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-3\right|=2\left|z\right|$ và $\max\left|z-1+2i\right|=a+b\sqrt{2}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $a+b$

A. 4. **B.** 3. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Gọi $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

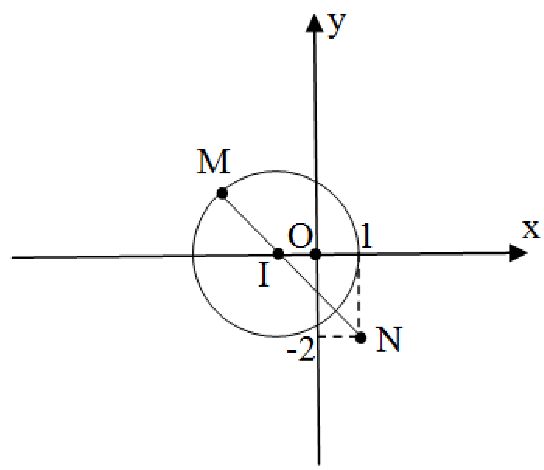
Ta có $\left|z-3\right|=2\left|z\right|\Leftrightarrow\left|\left(x-3\right)+yi\right|=2\left|x+yi\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-3=0.$

Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn z là đường tròn tâm $I\left(-1;0\right),R=2$.

Ta có $\left|z-1+2i\right|=\left|z-\left(1-2i\right)\right|=MN$ với $N\left(1;-2\right)$



Do $MN\le MI+IN=R+IN=2+2\sqrt{2}\Rightarrow a=2,\ b=2.$

Do đó $a+b=2+2=4.$

Cách 2. Gọi $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $\left|z-3\right|=2\left|z\right|\Leftrightarrow\left|\left(x-3\right)+yi\right|=2\left|x+yi\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\sqrt{-x^2-2x+3}\\ y=-\sqrt{-x^2-2x+3}\end{array}\right..$

$\left|z-1+2i\right|_{\max}\Leftrightarrow\left(\left|z-1+2i\right|\right)^2_{\max}$. Ta tính giá trị lớn nhất của $\left(\left|z-1+2i\right|\right)^2$.

$\left(\left|z-1+2i\right|\right)^2=\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=x^2-2x+1+y^2+4y+4$

$=x^2+2x-3+y^2-4x+4y+8=-4x+4y+8.$

Trường hợp 1: $y=\sqrt{-x^2-2x+3}$

Suy ra: $-4x+4y+8=-4x+4\sqrt{-x^2-2x+3}+8=f(x)$.

Khảo sát hàm $f(x)$ với $x\in[-3;1]$. Ta thấy $\max f(x)=12+8\sqrt{2}\left(\approx 23.31\right)$.

Trường hợp 2: $y=-\sqrt{-x^2-2x+3}$

Suy ra: $-4x+4y+8=-4x-4\sqrt{-x^2-2x+3}+8=f(x)$.

Khảo sát hàm $f(x)$ với $x\in[-3;1]$. Ta thấy $\max f(x)=20$.

Kết hợp 2 trường hợp ta có:

$$\max f(x)=12+8\sqrt{2}\Rightarrow |z-1+2i|_{\max}=2+2\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}\Rightarrow a+b=4.$$

Cách 3:

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-3|=2|z|\Leftrightarrow|(x-3)+yi|=2|x+yi|$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-3=0\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=4\Leftrightarrow(x+1)^2+y^2=4.$$

Vậy tập hợp số phức z thỏa mãn là đường tròn tâm $I(-1;0)$; $R=2$.

Vì vậy: $|z+1|=2$.

Do đó: $|z-1+2i|=|z+1-2+2i|\le|z+1|+|-2+2i|=2+2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases}z+1=k(-2+2i)\\k\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=|k|.2\sqrt{2}\\k\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow k=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow z=(-1-\sqrt{2})+i.\sqrt{2}.$$

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$ là.

A. 6. **B.** 4. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{13}+2$.

Lời giải

Cách 1. Gọi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z thì tập hợp các điểm M là đường tròn (C) tâm $I(2;3)$ bán kính $R=1$.

$|\overline{z}+1+i|=|z+1-i|=|z-(-1+i)|=MA$ với $A(-1;1)$.

Ta có $MA\le MI+IA=R+IA=1+\sqrt{13}\Rightarrow|\overline{z}+1+i|\le 1+\sqrt{13}$.

Dấu "=" xảy ra khi M,I,A thẳng hàng theo thứ tự đó M là giao điểm của đường thẳng IA và đường tròn (C) sao cho I nằm giữa A và M.

Cách 2. Ta có $|\overline{z}+1+i|=|z+1-i|=|(z-2-3i)+(3+2i)|\le|z-2-3i|+|3+2i|=1+\sqrt{13}$.

Cách 3. Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Có: $|z-2-3i|=1\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-3)^2=1\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-6y+12=0$.

Suy ra: $$\left[\begin{array}{l}x-2=\sqrt{1-(y-3)^2}\\x-2=-\sqrt{1-(y-3)^2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{-y^2+6y-8}+2\\x=-\sqrt{-y^2+6y-8}+2\end{array}\right.(2\le y\le 4).$$

$\left|\overline{z}+1+i\right|_{\max} \Leftrightarrow \left|\overline{z}+1+i\right|^2_{\max}$ $(Do\ \left|\overline{z}+1+i\right|_{\max} \geq 0).$ Ta tính: $\left|\overline{z}+1+i\right|^2_{\max}$.

$\left|\overline{z}+1+i\right|^2 = (x+1)^2+(-y+1)^2 = x^2+2x+1+y^2-2y+1$

$= x^2+y^2+2x-2y+2$

$= x^2+y^2-4x-6y+12+6x+4y-10$

$= 6x+4y-10.$

Trường hợp 1: $x = -\sqrt{-y^2+6y-8}+2$

Khi đó: $\left|\overline{z}+1+i\right|^2 = 6(-\sqrt{-y^2+6y-8}+2)+4y-10 = f(y).$

Khảo sát hàm $f(y)$ trên $\left[2;4\right]$ ta thấy $\max f(y) = 18.$

Trường hợp 2: $x = \sqrt{-y^2+6y-8}+2$

Khi đó: $\left|\overline{z}+1+i\right|^2 = 6(\sqrt{-y^2+6y-8}+2)+4y-10 = f(y).$

Khảo sát hàm $f(y)$ trên $\left[2;4\right]$ ta thấy $\max f(y) = 14+2\sqrt{13}(\approx 21.21).$

Kết hợp 2 trường hợp, ta có: $\max f(y) = 14+2\sqrt{13}.$ Suy ra: $\left|\overline{z}+1+i\right|_{\max} = 1+\sqrt{13}.$

Cách trắc nghiệm:

Gọi $z = x+yi\ \left(x, y \in \mathbb{R}\right).$

Có: $\left|z-2-3i\right| = 1 \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2-4x+y^2-6y+12 = 0(*).$

Ta sắp xếp các giá trị của mô-đun theo thứ tự giảm dần: $6 > 2+\sqrt{13} > 1+\sqrt{13} > 4.$

Xét đáp án A.

$\left|\overline{z}+1+\mathrm{i}\right| = 6 \Leftrightarrow (x+1)^2+(1-y)^2 = 36 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1 = 36$

$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-6y+12+6x+4y-46 = 0$

$\Leftrightarrow 6x+4y-46 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{23-2y}{3}.$

Thay $x = \dfrac{23-2y}{3}$ vào $(*)$ ta được: $\dfrac{4}{9}y^2-\dfrac{122}{9}y+\dfrac{361}{9} = 0.$ Giải phương trình này ta thấy vô nghiệm, vậy loại đáp án A.

Xét đáp án D.

$\left|\overline{z}+1+\mathrm{i}\right| = 2+\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1 = 14+2\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-6y+12+6x+4y-24-2\sqrt{13} = 0$

$\Leftrightarrow 6x+4y-24-2\sqrt{13} = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{12+\sqrt{13}-2y}{3}.$

Thay $x = \dfrac{12+\sqrt{13}-2y}{3}$ vào $(*)$ ta được: $\dfrac{13}{9}y^2-\left(\dfrac{154}{3}-4\sqrt{13}\right)y+\dfrac{121}{9}+4\sqrt{13} = 0.$ Giải phương trình này ta thấy có nghiệm, vậy nhận đáp án D.

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=1$ và $\left|z-\sqrt{3}+i\right|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1.

Gọi điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z.

Do $z.\overline{z}=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow |z|=1$ nên M thuộc đường tròn $\left(C_1\right)$ tâm $O\left(0;0\right)$ bán kính $R_1=1$.

Do $\left|z-\left(\sqrt{3}-i\right)\right|=m$ nên M thuộc đường tròn $\left(C_2\right)$ tâm $I\left(\sqrt{3};-1\right)$ bán kính $R_2=m>0$.

Vậy M là điểm chung của hai đường tròn $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$.

Để tồn tại duy nhất số phức z thì hai đường tròn $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ tiếp xúc với nhau

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} OI=R_1+R_2 \\ OI=\left|R_1-R_2\right| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2=1+m \\ 2=\left|1-m\right| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1(n) \\ m=3(n) \\ m=-1(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right..$$

Cách 2.

Gọi số phức $z=x+y.i(x,y\in\mathbb{R})$.

Do $z.\overline{z}=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow |z|=1$ nên $x^2+y^2=1$.

$\left|z-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=m\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2=m^2,\quad m>0.$

Để tồn tại duy nhất số phức z thì hệ phương trình

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2=m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1-y^2 \\ \left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2=m^2\ (*) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

$\left(*\right)\Leftrightarrow x^2+y^2-2x\sqrt{3}+3+2y+1=m^2$

$\Leftrightarrow 1-2x\sqrt{3}+3+2y+1=m^2$

$\Leftrightarrow 5-2x\sqrt{3}+2y=m^2$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{3}=5+2y-m^2.$

Suy ra: $12\left(1-y^2\right)=25+4y^2+m^4+20y-10m^2-4m^2y$

$\Leftrightarrow -16y^2+(4m^2-20)y+(-m^4+10m^2-13)=0(**).$

Điều kiện cần hệ phương trình trên có một nghiệm duy nhất là $(**)$ có một nghiệm kép. Vì vậy,

$\Delta'=(2m^2-10)^2+16(-m^4+10m^2-13)=0\Leftrightarrow -12m^4+120m^2-108=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm 3 \end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện ta có: $m=1,\ m=3.$

Thử lại và giải hệ phương trình ban đầu đều có một nghiệm duy nhất. Vì vậy, ta nhận $m=1,\ m=3.$

Cách 3. Đặt $z = a + bi$. Ta có $z.\overline{z} = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\left|z - \sqrt{3} + i\right| = m \\
&\Leftrightarrow \left(z - \sqrt{3} + i\right)\left(\overline{z} - \sqrt{3} - i\right) = m^2 \\
&\Leftrightarrow z.\overline{z} - \sqrt{3}\left(z + \overline{z}\right) - i\left(z - \overline{z}\right) + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{3}a + 2b + 4 = m^2 \\
&\Leftrightarrow -2\sqrt{3}a + 2b = m^2 - 5
\end{aligned}$$

Gọi $M\left(a,b\right)$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có $OM = 1$ và $M \in \left(d\right): -2\sqrt{3}x + 2y = m^2 - 5$.

M xác định duy nhất khi và chỉ khi

$$d\left(O,\left(d\right)\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\left|m^2 - 5\right|}{\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2}} = 1 \Leftrightarrow \left|m^2 - 5\right| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = 9 \\ m^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right. \text{(do } m \ge 0\text{)}.$$

Câu 43. Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mn $|z_1| = |z_2| = 1$. Tìm gi trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |z_1 + z_2| + 2|z_1 - z_2|.$$

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Đặt $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di\ \left(a,b,c,d \in \mathbb{R}\right)$.

Do $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$.

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki ta có:

$$P^2 = \left(|z_1 + z_2| + 2|z_1 - z_2|\right)^2 \le \left(1^2 + 2^2\right).\left(|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2\right) = 5.2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) = 20$$

$$\Rightarrow P \le 2\sqrt{5}.$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z_1 + z_2|}{1} = \dfrac{|z_1 - z_2|}{2} \\ |z_1 + z_2| + 2|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2| = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ |z_1 - z_2| = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(a + c\right)^2 + \left(b + d\right)^2 = \dfrac{4}{5} \\ \left(a - c\right)^2 + \left(b - d\right)^2 = \dfrac{16}{5} \end{cases} \Leftrightarrow ac + bd = -\frac{3}{5}$$

Từ đó có thể chọn $z_1 = 1$ và $z_2 = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$ để dấu "=" xảy ra.

Cách 2.

Đặt $z_1 = a+bi,\ z_2 = c+di\ \left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$.

Do $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}$.

$P^2 = \left(|z_1+z_2| + 2|z_1-z_2|\right)^2$

$= \left(\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} + 2\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\right)^2$

$\le (1^2+2^2)\left[(a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2\right]$

$= 5.2.(a^2+b^2+c^2+d^2) = 5.2.2 = 20$

Suy ra: $P_{\max} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = \dfrac{\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}{2} \ (1) \\ a^2+b^2=c^2+d^2=1 \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 4(a+c)^2 + 4(b+d)^2 = (a-c)^2+(b-d)^2$

$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2+d^2) + 10ac + 10bd = 0$

$\Leftrightarrow 6 + 10ac + 10bd = 0$

$\Leftrightarrow 3 + 5ac + 5bd = 0.$

Từ đó ta chọn $a=0,\ b=1 \Rightarrow 3+5d=0 \Leftrightarrow d = \dfrac{-3}{5}$.

Suy ra, chọn được $c = \dfrac{4}{5}\left(Do\ \ c^2+d^2=1\right)$.

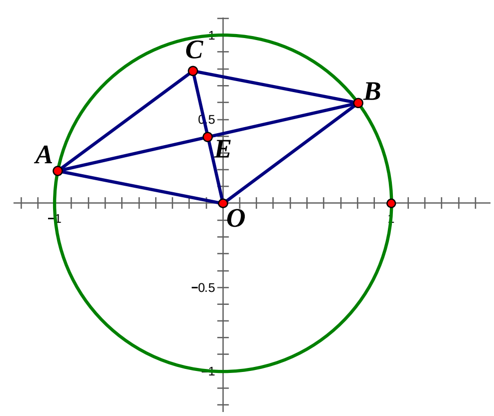
Nghĩa là 2 số phức $z_1 = i,\ z_2 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3.

Gọi A, B biểu diễn hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$.

Suy ra: quĩ tích hai điểm A, B là đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$.

Vẽ hình bình hành $OACB$. Suy ra: C là điểm biểu diễn số phức z_1+z_2.



Vì vậy: $|z_1+z_2| = OC$. Mà $|z_1-z_2| = AB$:

Do đó: $P = |z_1+z_2| + 2|z_1-z_2| = OC + 2.AB.$

Ta tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{P}{2} = OE + AB$ với E là giao điểm của 2 đường chéo hình bình hành $OACB$.

Nhận xét: $OACB$ là hình thoi do $OA = OB$.

Xét tam giác AOE vuông tại E.

$OA^2 = AE^2 + OE^2 = OE^2 + \dfrac{AB^2}{4} = 1.$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki ta có:

$$\left(OE+\frac{AB}{2}.2\right)^2\le\left(1^2+2^2\right)\left(OE^2+\frac{AB^2}{4}\right)=5.$$

$\Rightarrow OE+AB\le\sqrt{5}.$

Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $2\sqrt{5}.$ Đẳng thức xảy ra khi: $AB=4.OE.$

Cách trắc nghiệm:

Chọn giá trị đặc biệt $x=1, y=i$, ta thấy $P=3\sqrt{2}$, loại A,C,D. Chọn B.

Câu 46. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z+2w|=3, |2z+3w|=6$ và $|z+4w|=7.$ Tính giá trị của biểu thức $P=z.\overline{w}+\overline{z}.w.$

A. $P=-14i.$ **B.** $P=-28i.$ **C.** $P=-14.$ **D.** $P=-28.$

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Gọi hai điểm $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ lần lượt biểu diễn 2 số phức z,w.

$$\begin{cases}|z+2w|=3\\|2z+3w|=6\\|z+4w|=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|=3\\\left|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|=6\\\left|\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right)^2=9\\\left(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right)^2=36\\\left(\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right)^2=49\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}OA^2+4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+4OB^2=9\\4OA^2+12\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+9OB^2=36\\OA^2+8\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+16OB^2=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}OA^2=33\\\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-14\\OB^2=8\end{cases}$$

$$P=z.\overline{w}+\overline{z}.w=z.\overline{w}+\overline{z.\overline{w}}=2\operatorname{Re}\left(z.\overline{w}\right)=2\operatorname{Re}\left[\left(x_1+y_1i\right)\left(x_2-y_2i\right)\right]$$

$$=2\left(x_1x_2+y_1y_2\right)=2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-28.$$

Cách 2.

$|z+2w|=3\Leftrightarrow|z+2w|^2=9\Leftrightarrow(z+2w)(\overline{z+2w})=9\Leftrightarrow(z+2w)(\overline{z}+2\overline{w})=9$

$\Leftrightarrow z.\overline{z}+2.z\overline{w}+2w\overline{z}+4.w.\overline{w}=9$

$\Leftrightarrow|z|^2+4|w|^2+2P=9(1).$

$|2z+3w|=6\Leftrightarrow|2z+3w|^2=36\Leftrightarrow(2z+3w)(\overline{2z+3w})=36\Leftrightarrow(2z+3w)(2\overline{z}+3\overline{w})=36$

$\Leftrightarrow 4z.\overline{z}+6.z\overline{w}+6w\overline{z}+9.w.\overline{w}=36$

$\Leftrightarrow 4|z|^2+9|w|^2+6P=36(2).$

$|z+4w|=7\Leftrightarrow|z+4w|^2=49\Leftrightarrow(z+4w)(\overline{z+4w})=49\Leftrightarrow(z+4w)(\overline{z}+4\overline{w})=49$

$\Leftrightarrow z.\overline{z}+4.z\overline{w}+4w\overline{z}+16.w.\overline{w}=49$

$\Leftrightarrow|z|^2+16|w|^2+4P=49(3).$

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}|z|^2+4|w|^2+2P=9\\4|z|^2+9|w|^2+6P=36\\|z|^2+16|w|^2+4P=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^2=33\\|w|^2=8\\P=-28\end{cases}.$

Cách 3.

Đặt $z = a + bi$ và $w = c + di$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$. Ta có:

$$\begin{cases} |z+2w| = 3 \\ |2z+3w| = 6 \\ |z+4w| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+2c+(b+2d)i| = 3 \\ |2a+3c+(2b+3d)i| = 6 \\ |a+4c+(b+4d)i| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2c)^2+(b+2d)^2 = 9 \\ (2a+3c)^2+(2b+3d)^2 = 36 \\ (a+4c)^2+(b+4d)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2+b^2)+4(c^2+d^2)+4(ac+bd) = 9 \\ 4(a^2+b^2)+9(c^2+d^2)+12(ac+bd) = 36 \\ (a^2+b^2)+16(c^2+d^2)+8(ac+bd) = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 33 \\ c^2+d^2 = 8 \\ ac+bd = -14 \end{cases}.$$

Suy ra: $P = z\overline{w} + w\overline{z} = (a+bi)(c-di)+(c+di)(a-bi) = 2ac+2bd = -28$.

Câu 47. Cho số phức z thoả mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Môđun của số phức $z-2-i$ bằng

A. 5. **B.** 9. **C.** 25. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

Đặt $z = x + yi$,$(\forall x, y \in \mathbb{R})$.

$|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2 = 5 \quad (1)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= |z+2|^2 - |z-i|^2 \\ &= |(x+2)+yi|^2 - |x+(y-1)i|^2 \\ &= 4x+2y+3 = 4(x-3)+2(y-4)+23 \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki ta có:

$[4(x-3)+2(y-4)]^2 \le (4^2+2^2).[(x-3)^2+(y-4)^2] = 20.5 = 100$

$\Rightarrow 4(x-3)+2(y-4) \le 10$

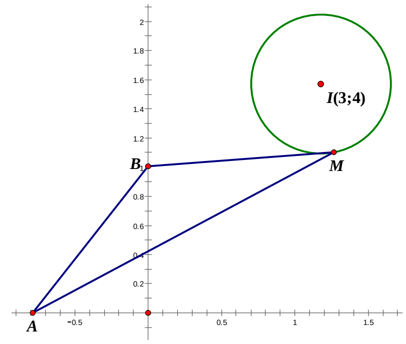
$= 4(x-3)+2(y-4)+23 \Rightarrow M \le 33$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{y-4} = \dfrac{4}{2} \\ 4x+2y+3 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow z = 5+5i \Rightarrow |z-2-i| = 5$

Cách 2.

Gọi điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z.

Ta có $\left|z-3-4i\right|=\sqrt{5}$ suy ra quĩ tích điểm M là đường tròn tâm $I(3;4),\ R=\sqrt{5}.$



Gọi điểm biểu diễn $(-2;0),\ (0;1)$ lần lượt là $A,B.$

Suy ra: $M=\left|z+2\right|^2-\left|z-i\right|^2=MA^2-MB^2$

$$MA^2-MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$=MI^2+2.\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+IA^2-MI^2-2.\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}-IB^2$$

$$=IA^2-IB^2+2.\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)$$

$$=41-18+2.\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$$

$$=23+2.\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}.$$

Có: $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}=\cos(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{BA}).MI.AB\le MI.AB=5.$

Đẳng thức xảy ra khi: $\cos(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{BA})=1$hay $\overrightarrow{MI},\overrightarrow{BA}$ cùng hướng.

Mà $MI=AB=\sqrt{5}\Rightarrow\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{BA}.$ Có: $\overrightarrow{BA}=(-2;-1)$ nên $M(5;5).$

$\left|z-2-i\right|=MC=\sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2}=5$ với $C(2;1).$

Cách 3.

Đặt $t=z-2-i$, ta có:

$$\left|z-3-4i\right|=\sqrt{5}\Rightarrow\left|t-1-3i\right|=\sqrt{5}\Rightarrow\left(t-1-3i\right)\left(\overline{t}-1+3i\right)=5$$

$$\Rightarrow t\overline{t}+t\left(-1+3i\right)+\overline{t}\left(-1-3i\right)+10=5$$

$$\Rightarrow t\overline{t}=-5+t\left(1-3i\right)+\overline{t}\left(1+3i\right).$$

$$M=\left|z+2\right|^2-\left|z-i\right|^2=\left|t+4+i\right|^2-\left|t+2\right|^2=\left(t+4+i\right)\left(\overline{t}+4-i\right)-\left(t+2\right)\left(\overline{t}+2\right)$$

$$=t\left(2-i\right)+\overline{t}\left(2+i\right)+13$$

$$=t\left(2-i\right)+\overline{t}\left(2+i\right)+13+5+t\left(1-3i\right)+\overline{t}\left(1+3i\right)-t\overline{t}$$

$$=3\left(t+\overline{t}\right)-4i\left(t-\overline{t}\right)-t\overline{t}+8$$

$$\le\sqrt{\left(3^2+4^2\right)\left\{\left(t+\overline{t}\right)^2+\left[i\left(t-\overline{t}\right)\right]^2\right\}}-\left|t\right|^2+8$$

$$=10\left|t\right|-\left|t\right|^2+18$$

$$=-\left(\left|t\right|-5\right)^2+33\le 33.$$

Dấu bằng xảy ra khi $t=3+4i,\left|t\right|=5$. Vậy $\left|z-2-i\right|=5$.